Le sujet 2 comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

EXERCICE I - (10 points)

Donner les réponses des questions I-1-, I-2- et I-3- dans le cadre prévu ci-dessous

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\qquad f(x) = (1 - x)\, e^{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I-1-a- Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

I-1-b- En déduire que f admet une asymptote Δ au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.

I-2-a- Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

I-2-b- Compléter le tableau des variations de f.

I-3-a- Déterminer une équation de la tangente T_1 au point A d'abscisse 1 de la courbe $\mathcal{C}_f$ et une équation de la tangente T_{-1} au point B d'abscisse -1.

I-3-b- Expliquer pourquoi l'on peut affirmer que les tangentes T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-a- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

I-1-b- $\Delta : \quad y = 0$

I-2-a- $f'(x) = -e^{x} + (1 - x)e^{x} = -\, x\, e^{x}$

I-2-b-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

I-3-a- $T_1 \ : \quad y = -e\, x + e \qquad T_{-1} \ : \quad y = \dfrac{1}{e}\, x + \dfrac{3}{e}$

I-3-b- T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires car le produit de leurs coefficients directeurs $-e$ et $\dfrac{1}{e}$ est égal à -1.

EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses aux questions suivantes de l'exercice dans le cadre prévu à la page 3

I-4- On se propose d'étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_{-1}.

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1 - x)\,e^x - \left(\frac{x + 3}{e}\right).$$

I-4-a- Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$ où g' et g'' sont les dérivées première et seconde de g.

I-4-b- Etudier le signe de g'' et le sens de variation de g'. Préciser la valeur de $g'(-1)$.

Etudier le signe de g' et le sens de variation de g. Préciser la valeur de $g(-1)$.

Enfin donner le signe de g.

I-4-c- Indiquer alors la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente T_{-1}.

I-5- Tracer l'asymptote Δ, les tangentes T_1 et T_{-1} et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Pour tracer ces courbes, on considèrera les valeurs approchées suivantes :

$e \approx 2,7$ et $\dfrac{1}{e} \approx 0,4$.

REPONSES A L'EXERCICE I (suite)

I-4-a- $g'(x) = -\,x\,e^{x} \;-\; \dfrac{1}{e}$

$g''(x) = -\,e^{x} \;-\; x\,e^{x} \;=\; -\,(1+x)\,e^{x}$

I-4-b-

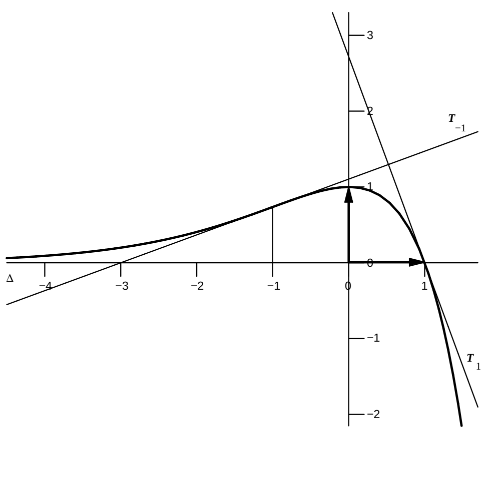
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $g''(x)$	$+$	0	$-$
sens de variation de g'	$\nearrow$	0	$\searrow$
signe de $g'(x)$	$-$	0	$-$
sens de variation de g	$\searrow$	0	$\searrow$
signe de $g(x)$	$+$	0	$-$

$g'(-\,1) \;=0$

$g(-\,1) \;=0$

I-4-c- Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_{-1} **:** La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_{-1} sur l'intervalle $]-\infty; -1]$ et en dessous sur $[-1; +\infty[$.

I-5-



graph3

EXERCICE II (4 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

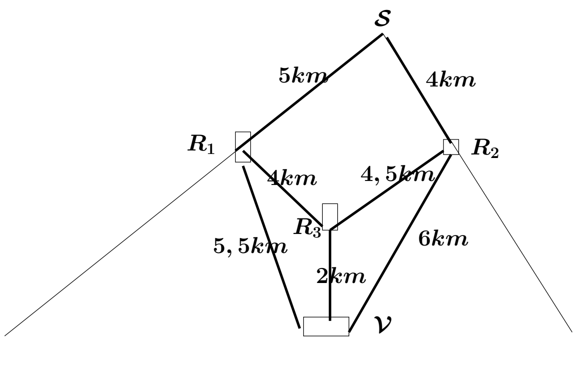
Pour descendre du sommet $\mathcal{S}$ d'une montagne, des skieurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. Ils doivent impérativement passer par l'un des deux restaurants se trouvant tous les deux à 2200 mètres d'altitude. Les deux restaurants ne sont pas situés sur le même versant de la montagne. On les nomme $\boldsymbol{R_1}$ et $\boldsymbol{R_2}$.

Après la pause repas, pour atteindre le village $\mathcal{V}$ qui se trouve à 1100 m d'altitude, les skieurs ont deux possibilités : ils peuvent descendre directement au village ou faire une halte au restaurant $\boldsymbol{R_3}$ qui se trouve à 1800 m d'altitude, pour prendre un café.

La probabilité que les skieurs choisissent de passer par $\boldsymbol{R_1}$ est égale à $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$.

En partant de $\boldsymbol{R_1}$, la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$.

En partant de $\boldsymbol{R_2}$, la probabilité que les skieurs descendent directement au village est égale à $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$.



II-1- Compléter l'arbre représentant tous les trajets possibles du sommet $\mathcal{S}$ au village $\mathcal{V}$.

II-2-a- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_1}$ que les skieurs prennent un café au restaurant $\boldsymbol{R_3}$, sachant qu'ils ont déjeuné ensemble au restaurant $\boldsymbol{R_1}$.

II-2-b- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_2}$ que les skieurs prennent un café au restaurant $\boldsymbol{R_3}$.

II-2-c- Déterminer la probabilité $\boldsymbol{P_3}$ que les skieurs aient déjeuné au restaurant $\boldsymbol{R_1}$, sachant qu'ils ont pris un café au restaurant $\boldsymbol{R_3}$.

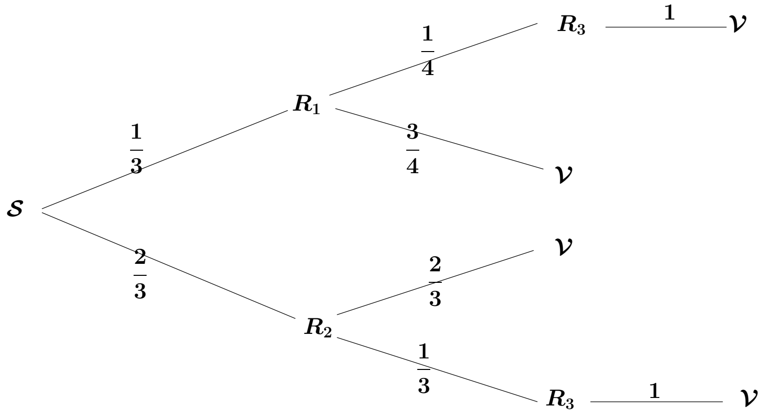
II-3- Les distances en kilomètres entre les différents points sont : $\mathcal{S}\boldsymbol{R_1} = \mathbf{5}$, $\mathcal{S}\boldsymbol{R_2} = \mathbf{4}$, $\boldsymbol{R_2R_3} = \mathbf{4,5}$, $\boldsymbol{R_1R_3} = \mathbf{4}$, $\boldsymbol{R_3}\mathcal{V} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{R_1}\mathcal{V} = \mathbf{5,5}$, $\boldsymbol{R_2}\mathcal{V} = \mathbf{6}$ (cf. figure ci-dessus).

Soit $\boldsymbol{D}$ la variable aléatoire représentant la distance parcourue par les skieurs pour aller du sommet $\mathcal{S}$ au village $\mathcal{V}$.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\boldsymbol{D}$.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-



II-2-a- $P_1 = \frac{1}{4}$

II-2-b- $P_2 = \frac{11}{36}$

II-2-c- $P_3 = \frac{3}{11}$

II-3-

x_i	10	$10,5$	11
$\mathbb{P}(D = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{1}{12}$

EXERCICE III - (6 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les trois points non alignés A, B, C suivants, donnés par leurs coordonnées :

$$A\,(1\,;\,0\,;\,-1) \qquad B\,(3\,;\,-1\,;\,2) \qquad C\,(2\,;\,-2\,;\,-1),$$

et le point E de coordonnées : $E\,(4\,;\,-1\,;\,-2)$.

III-1-a- Montrer que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC).

III-1-b- En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C.

III-1-c- Calculer la distance $d(E\,;\,\mathcal{P})$ du point E au plan $\mathcal{P}$.

III-2- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AE).

III-3- On considère la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\mathcal{D}\ :\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

III-3-a- Donner un point J et un vecteur directeur $\vec{w}$ de $\mathcal{D}$.

III-3-b- Expliquer pourquoi la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

III-4-a- Déterminer le point M de $\mathcal{D}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\vec{v}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ soient orthogonaux.

III-4-b– En déduire la distance $d(E\,;\,\mathcal{D})$ du point E à la droite $\mathcal{D}$.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-a-	$(CE) \perp (AB)$ car $\overrightarrow{CE}\,(2;1;-1)$ et $\overrightarrow{AB}\,(2;-1;3)$ Le produit scalaire de ces vecteurs est nul : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB} = 4-1-3 = 0$. donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$. $(CE) \perp (AC)$ car $\overrightarrow{CE}\,(2;1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1;-2;0)$ Le produit scalaire de ces vecteurs est nul : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AC} = 2-2-0 = 0$. donc $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AC}$.
III-1-b-	$\mathcal{P}\ :\ 2x+y-z-3=0$
III-1-c-	$d(E\,;\,\mathcal{P}) = \sqrt{6}$
III-2-	(AE) a pour système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -t \\ z = -1-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
III-3-a-	$J\,(0;2;-1)$ $\quad\quad$ $\vec{w}\,(0;1;1)$
III-3-b-	$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ car : Tout d'abord, le point J appartient au plan $\mathcal{P}$ car $2.0+2-(-1)-3=0$. Ensuite les vecteurs $\vec{w}\,(0;1;1)$ et $\overrightarrow{CE}\,(2;1;-1)$ sont orthogonaux car leur produit scalaire est nul : $\vec{w}\,.\,\overrightarrow{CE} = 0+1-1=0$. Or $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ donc $\vec{w}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$. Donc la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans $\mathcal{P}$.
III-4-a-	$M\,(0;0;-3)$
III-4-b-	$d(E\,;\,\mathcal{D}) = 3\sqrt{2}$