Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

EXERCICE I - (7 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On considère deux fonctions f et g définies sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ par :

$$f(x) = \cos x \qquad\qquad g(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.

I-1-a- Pour tout x de $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$, $g(x) - f(x)$ s'écrit sous la forme :

$g(x) - f(x) = \dfrac{h(x)}{1 - \sin x}$. Donner une expression simplifiée de $h(x)$.

I-1-b- Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $g(x) - f(x) = 0$ dans $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

I-1-c- Etudier le signe de $g(x) - f(x)$ sur $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

I-1-d- Déterminer les coordonnées des points d'intersection C et D des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Précisez les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

I-2-a- Déterminer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f.

I-2-b- Dresser le tableau des variations de f.

I-3-a- Déterminer $g'(x)$, où g' désigne la dérivée de g.

I-3-b- Dresser le tableau des variations de g.

I-4-a- Donner une équation des tangentes T_C et T_D à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points C et D.

I-4-b- Donner une équation des tangentes T'_C et T'_D à la courbe $\mathcal{C}_g$ aux points C et D.

I-5- Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que les tangentes T_C, T_D et T'_C et T'_D.

I-6-a- On pose : $\displaystyle I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx$ et $\displaystyle J = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin x}\, dx$.

Déterminer les valeurs de I et de J. Justifier les calculs.

I-6-b- Sur la figure de la question **I-5-**, colorier la partie de plan d'aire $I - J$ unités d'aires.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-a- $h(x) = \cos x \sin x$

I-1-b-

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right\}$$

I-1-c-

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
signe de $g(x) - f(x)$	0	$-$	0

I-1-d- $C\left(\frac{3\pi}{2} ; 0\right)$ et $D\left(2\pi ; 1\right)$

Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$: $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

I-2-a-

$$f'(x) = -\sin x$$

I-2-b-

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	1	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

I-3-a-

$$g'(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$$

I-3-b-

x	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	1
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

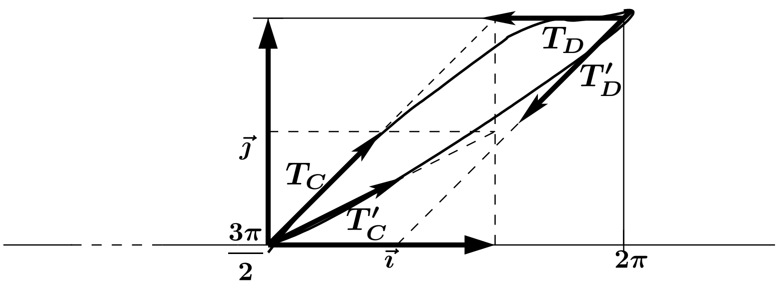
I-4-a- $T_C : y = x - \frac{3\pi}{2}$

$T_D : y = 1$

I-4-b- $T'_C : y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

$T'_D : y = x - 2\pi + 1$

I-5-



I-6-a- $I = 1$ car $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

$J = \ln 2$

car $J = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx = [-\ln|1 - \sin x|]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2$

I-6-b– Utilisez la figure de **I-A-5-**.

EXERCICE II - (2,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera **sa valeur exacte**, écrite sous forme de **fraction irréductible**.

Au cours d'une loterie, vingt billets sont mis en vente au prix de **6** euros le billet. Cinq billets seulement sont gagnants, chacun rapportant **30** euros.

Un joueur achète deux billets.

On note $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire représentant le bénéfice net du joueur, exprimé en euros. Le bénéfice net est le gain (positif ou nul) perçu par le joueur à l'issue de la partie, diminué du prix d'achat des deux billets. Le bénéfice net peut donc être négatif.

II-1-a- Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$.

II-1-b- Donner l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$ de $\boldsymbol{X}$.

II-2- L'organisateur de la loterie propose de multiplier les gains par deux si on achète les billets à **13** euros le billet.

Soit $\boldsymbol{Y}$ la variable aléatoire représentant le bénéfice net, en euros, d'un joueur achetant deux billets à **13** euros le billet.

II-2-a- Donner, dans le tableau prévu, la loi de probabilité de $\boldsymbol{Y}$.

II-2-b- Donner l'espérance mathématique $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y})$ de $\boldsymbol{Y}$.

II-2-c- Le joueur a-t-il intérêt à accepter la proposition de l'organisateur ? Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-a-	<table><tr><td>x_i</td><td>-12</td><td>18</td><td>48</td></tr><tr><td>$\mathbb{P}(X = x_i)$</td><td>$\frac{21}{38}$</td><td>$\frac{15}{38}$</td><td>$\frac{1}{19}$</td></tr></table>
II-1-b-	$\mathbb{E}(X) = 3$
II-2-a-	<table><tr><td>y_i</td><td>-26</td><td>34</td><td>94</td></tr><tr><td>$\mathbb{P}(Y = y_i)$</td><td>$\frac{21}{38}$</td><td>$\frac{15}{38}$</td><td>$\frac{1}{19}$</td></tr></table>
II-2-b-	$\mathbb{E}(Y) = 4$
II-2-c-	Le joueur a intérêt à accepter la nouvelle proposition car son espérance de gain sera plus grande : $\mathbb{E}(Y) \geq \mathbb{E}(X)$

EXERCICE III - (4 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}; \vec{v})$ orthomormé, on considère les points A, I et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1, \qquad z_I = 2 \qquad \text{et} \qquad z_B = 3$$

Pour tout complexe z, différent de 2, on pose :

$$z' = \frac{1}{z-2} + 2$$

On considère la fonction F qui à tout point M du plan, différent de I et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

III-1- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $F(M) = M$. Justifier la réponse.

III-2-a- Calculer, en fonction de z, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

III-2-b- En déduire une relation entre les longueurs IM et IM' et une relation entre les angles $(\vec{u}\,; \overrightarrow{IM})$ et $(\vec{u}\,; \overrightarrow{IM'})$.

III-3- On considère un point M différent de I, de A et de B. Soit z son affixe.

III-3-a- Donner le réel β qui vérifie : $\dfrac{1-z'}{3-z'} = \beta\, \dfrac{1-z}{3-z}$.

III-3-b- En déduire une relation entre $\dfrac{M'A}{M'B}$ et $\dfrac{MA}{MB}$ et une relation entre les angles $(\overrightarrow{M'B}; \overrightarrow{M'A})$ et $\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})$.

III-3-c- On suppose dans cette question que M appartient à la médiatrice Δ du segment $[AB]$. Que peut on en déduire pour le point M' ? Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-1-	$\mathcal{E} = \left\{ A\,;\,B \right\}$ car $F(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad z = \dfrac{1}{z-2} + 2$ $\Leftrightarrow \quad z - 2 = \dfrac{1}{z-2} \quad \Leftrightarrow \quad (z-2)^2 = 1$ $\Leftrightarrow \quad z^2 - 4z + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1$ ou $z = 3$
III-2-a-	affixe de $\overrightarrow{IM}$: $z - 2$ affixe de $\overrightarrow{IM'}$: $z' - 2 = \dfrac{1}{z-2}$
III-2-b-	Relation entre IM et IM' : $IM' = \dfrac{1}{IM}$ Relation entre $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM})$ et $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM'})$: $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM'}) = -(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IM})$
III-3-a-	$\beta = -1$
III-3-b-	Relation entre $\dfrac{M'A}{M'B}$ et $\dfrac{MA}{MB}$: $\dfrac{M'A}{M'B} = \dfrac{MA}{MB}$ Relation entre $(\overrightarrow{M'B}\,;\,\overrightarrow{M'A})$ et $(\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA})$: $(\overrightarrow{M'B}\,;\,\overrightarrow{M'A}) = (\overrightarrow{MB}\,;\,\overrightarrow{MA}) + \pi$
III-3-c-	M' appartient à la médiatrice Δ car $M \in \Delta \quad \Rightarrow \quad MA = MB \quad \Rightarrow \quad \dfrac{MA}{MB} = 1$ Et, d'après **III-3-b-**, on en déduit que : $\dfrac{M'A}{M'B} = 1$ ce qui implique : $M'A = M'B \quad \Rightarrow \quad M' \in \Delta$

EXERCICE IV- (6,5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Question Préliminaire

On considère un triangle quelconque LMN du plan. On note H la projection orthogonale de L sur la droite (MN) et I le milieu du segment $[MN]$.

IV-0- Démontrer que les aires des triangles LMI et LIN sont égales.

Soit ABC un triangle du plan. On considère les points A', B' et C' définis de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point P, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point Q et les droites (AA') et (CC') se coupent en un point R.

IV-1- Construire les points A', B', C' et les points P, Q, R sur la figure donnée.

IV-2- Déterminer les réels a, b et c tels que :
- C' soit le barycentre du système $\{(A, a)\,;\,(B, 1)\}$,
- A' soit le barycentre du système $\{(B, b)\,;\,(C, 1)\}$,
- B' soit le barycentre du système $\{(A, 1)\,;\,(C, c)\}$.

IV-3- On considère les barycentres G_1, G_2 et G_3 des systèmes suivants :
$G_1 = bar\ \{(A, 2)\,;\,(B, 1)\,;\,(C, 4)\}$,
$G_2 = bar\ \{(A, 4)\,;\,(B, 2)\,;\,(C, 1)\}$,
$G_3 = bar\ \{(A, 1)\,;\,(B, 4)\,;\,(C, 2)\}$.

IV-3-a- Expliquer pourquoi G_1 appartient aux droites (CC') et (BB').

IV-3-b- En déduire quel est le point G_1.

IV-3-c- De même, identifier les points G_2 et G_3.

IV-4- A l'aide de la question **IV-$\mathcal{B}$-3-**, déterminer les réels x, y, x' et y' tels que :
$\overrightarrow{CR} = x\,\overrightarrow{CA} + y\,\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CQ} = x'\,\overrightarrow{CA} + y'\,\overrightarrow{CB}$.

En déduire la position de Q sur le segment $[CR]$. Justifier toutes les réponses.

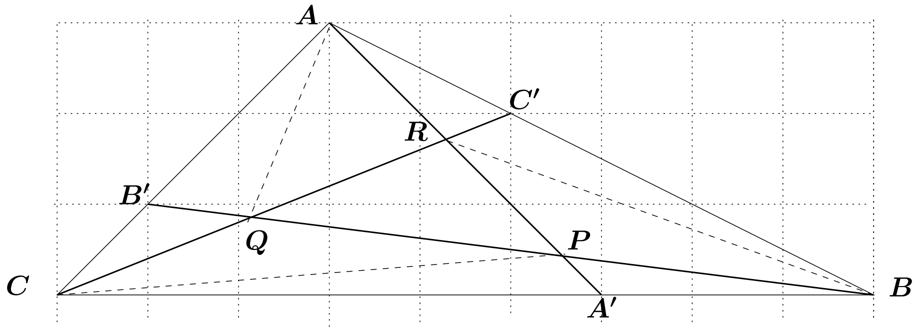
IV-5-a- On admet alors que le point P est le milieu du segment $[BQ]$ et que le point R est le milieu du segment $[AP]$.

A l'aide des questions **IV-0-** et **IV-4-**, justifier chaque égalité d'aires suivante :

$Aire(PQR) = Aire(PQC) \qquad Aire(PQC) = Aire(CBP)$
$Aire(PQR) = Aire(BRP) \qquad Aire(BRP) = Aire(BRA)$
$Aire(PQR) = Aire(AQR) \qquad Aire(AQR) = Aire(AQC)$

IV-5-b- Déterminer alors le rapport $k = \dfrac{Aire(PQR)}{Aire(ABC)}$.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-0-	$\boldsymbol{Aire(LMI) = \dfrac{MI \times LH}{2}}$ et $\boldsymbol{Aire(LIN) = \dfrac{IN \times LH}{2}}$ $\boldsymbol{I}$ étant le milieu de $[\boldsymbol{MN}]$, on a $\boldsymbol{MI = IN}$ donc $\boldsymbol{Aire(LMI) = Aire(LIN)}$
IV-1-	
IV-2-	$\boldsymbol{a = 2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b = 2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{c = 2}$
IV-3-a-	$\boldsymbol{G_1 \in (CC')}$ car $\boldsymbol{G_1 = bar\ \{(A,2);(B,1);(C,4)\}}$ et $\boldsymbol{C' = bar\ \{(A,2);(B,1)\}}$ donc d'après la propriété des barycentres partiels, on a : $\boldsymbol{G_1 = bar\ \{(C',3);(C,4)\}}$ d'où $\boldsymbol{G_1 \in (CC')}$ $\boldsymbol{G_1 \in (BB')}$ car $\boldsymbol{G_1 = bar\ \{(A,2);(B,1);(C,4)\}}$ et $\boldsymbol{B' = bar\ \{(A,1);(C,2)\} = bar\ \{(A,2);(C,4)\}}$ et d'après la propriété des barycentres partiels, on a : $\boldsymbol{G_1 = bar\ \{B,1);(B',6)\}}$ d'où $\boldsymbol{G_1 \in (BB')}$
IV-3-b- $\boldsymbol{G_1 = Q}$	**IV-3-c-** $\boldsymbol{G_2 = R}$ $\qquad$ $\boldsymbol{G_3 = P}$
IV-4-	$\boldsymbol{x = \dfrac{4}{7}}$ et $\boldsymbol{y = \dfrac{2}{7}}$ car $\boldsymbol{R = G_2 = bar\ \{(A,4);(B,2);(C,1)\}}$ donc $\boldsymbol{7\overrightarrow{CR} = 4\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}$ d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{CR} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \dfrac{2}{7}\overrightarrow{CB}}$. $\boldsymbol{x' = \dfrac{2}{7}}$ et $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{7}}$ car $\boldsymbol{Q = G_1 = bar\ \{(A,2);(B,1);(C,4)\}}$ donc $\boldsymbol{7\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}$ d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{CQ} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{CB}}$. $\boldsymbol{Q}$ est le milieu de $[\boldsymbol{CR}]$ car $\boldsymbol{\overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{CQ}}$.
IV-5-a-	$\boldsymbol{Aire(PQR) = Aire(PQC)}$ car $\boldsymbol{Q}$ est le milieu de $[\boldsymbol{CR}]$ et on applique **IV-0-** dans le triangle $\boldsymbol{PCR}$. $\boldsymbol{Aire(PQC) = Aire(CBP)}$ car $\boldsymbol{P}$ milieu de $[\boldsymbol{BQ}]$ (d'après **IV-0-** dans $\boldsymbol{CBQ}$). $\boldsymbol{Aire(PQR) = Aire(BRP)}$ car $\boldsymbol{P}$ milieu de $[\boldsymbol{BQ}]$ (d'après **IV-0-** dans $\boldsymbol{RBQ}$). $\boldsymbol{Aire(BRP) = Aire(BRA)}$ car $\boldsymbol{R}$ milieu de $[\boldsymbol{AP}]$ (d'après **IV-0-**dans $\boldsymbol{BAP}$). $\boldsymbol{Aire(PQR) = Aire(AQR)}$ car $\boldsymbol{R}$ milieu de $[\boldsymbol{AP}]$ (d'après **IV-0-** dans $\boldsymbol{AQP}$). $\boldsymbol{Aire(AQR) = Aire(AQC)}$ car $\boldsymbol{Q}$ milieu de $[\boldsymbol{CR}]$ (d'après **IV-0-** dans $\boldsymbol{ACR}$).
IV-5-b-	$\boldsymbol{k = \dfrac{1}{7}}$