CONCOURS Geipi Polytech

NOM :	PRÉNOM :
Centre d'écrit :	

N° Inscription :

Ne rien inscrire ci-dessous

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Série STI2D-STL

Mercredi 11 mai 2016

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1h30.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Les réponses aux questions seront à écrire au stylo et uniquement dans les cadres des documents réponses prévues à cet effet.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
L'usage d'un téléphone ou de tout objet communiquant est interdit.

Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.

Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.

Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

1	
2	
3	
4	

TOTAL

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Un verre d'eau est sorti du réfrigérateur et placé dans une pièce dont la température ambiante est constante et égale à $25^\circ C$.

A la sortie du réfrigérateur, la température de l'eau est égale à $5^\circ C$ et 20 minutes plus tard, elle est montée à $15^\circ C$.

Pour tout $t \geq 0$, on désigne par $f(t)$ la température de l'eau au bout d'un temps t après sa sortie du réfrigérateur.

La durée t est exprimée en minutes et la température $f(t)$ est exprimée en degrés Celsius.

La fonction f vérifie l'équation différentielle suivante :

(E) : $f'(t) - k\,f(t) = -25\,k$, où k est une constante réelle non nulle.

I-1- Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f(20)$.

I-2-a- On considère l'équation différentielle :

$$(H) \ : \ f'(t) - k\,f(t) = 0.$$

Les solutions f de l'équation différentielle (H) vérifient :

pour tout $t \geq 0$, $f(t) = Ce^{at}$, où C est un réel quelconque.

Donner la valeur du réel a.

I-2-b- Les solutions f de l'équation différentielle (E) vérifient :

pour tout $t \geq 0$, $f(t) = Ce^{kt} + B$.

Montrer que $B = 25$.

I-2-c- En utilisant la valeur de $f(0)$, déterminer la constante C. Justifier la réponse.

I-2-d- En utilisant la valeur de $f(20)$, justifier que : $k = -\dfrac{\ln 2}{20}$.

Dans toute la suite, on admet que :

pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 25 - 20\,e^{-\frac{\ln 2}{20}\,t}$.

I-3- Déterminer la température θ de l'eau 30 minutes après sa sortie du réfrigérateur. On donnera une valeur approchée de θ à 10^{-1} près. Détailler le calcul.

I-4- Au bout de quelle durée D, la température de l'eau atteindra-t-elle $20^\circ C$? Donner la valeur exacte de D. Détailler le calcul.

I-5- La température de l'eau atteindra-t-elle $25^\circ C$? Justifier la réponse.

I-6- Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Justifier la réponse.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE I

I-1-	$f(0) =$	$f(20) =$
I-2-a-	$a =$	
I-2-b-	$B = 25$, en effet :	
I-2-c-	$C =$ en effet :	
I-2-d-	$k = -\dfrac{\ln 2}{20}$, en effet :	
I-3-	$\theta \approx$, en effet :	
I-4-	$D =$, en effet :	
I-5-	La température de l'eau .... $25^{\circ}C$, en effet :	
I-6-	$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) =$ en effet :	

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout } x \in]0;\ +\infty[, \qquad f(x) = \frac{2\ \ln x\ -\ 1}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II-1-a- Donner $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

II-1-b- Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$? En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

II-1-c- On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2.

Donner une équation de chacune d'elles.

II-2- f' désigne la dérivée de f. Justifier que :

$$\text{pour tout } x \in]0;\ +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{3\ -\ 2\ln x}{x^2}.$$

II-3-a- Dresser le tableau des variations de f.

II-3-b- La fonction f présente un maximum y_M atteint en x_M.

Donner les valeurs exactes puis des valeurs approchées à 10^{-1} près de x_M et y_M.

Dans la suite, on note M le point de coordonnées $(x_M,\ y_M)$.

II-4-a- Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

II-4-b- Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1 et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.

Donner une équation de T.

II-5- Soit B le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

On note $(x_B,\ y_B)$ ses coordonnées.

Donner les valeurs exactes de x_B et de y_B, puis une valeur approchée de x_B à 10^{-1} près.

II-6- Placer les points A, B et M.

Tracer les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A et M et les asymptotes Δ_1, Δ_2.

Puis tracer $\mathcal{C}$.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-a- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

II-1-b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} =$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$, en effet :

II-1-c- Δ_1 : Δ_2 :

II-2- Soit $x > 0$. Détail du calcul de $f'(x)$:

II-3-a-

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	||
$f(x)$	||

II-3-b-

$x_M =$ $\qquad$ $x_M \approx$

$y_M =$ $\qquad$ $y_M \approx$

II-4-a-

$f(1) =$

$f'(1) =$

II-4-b- Equation de T :

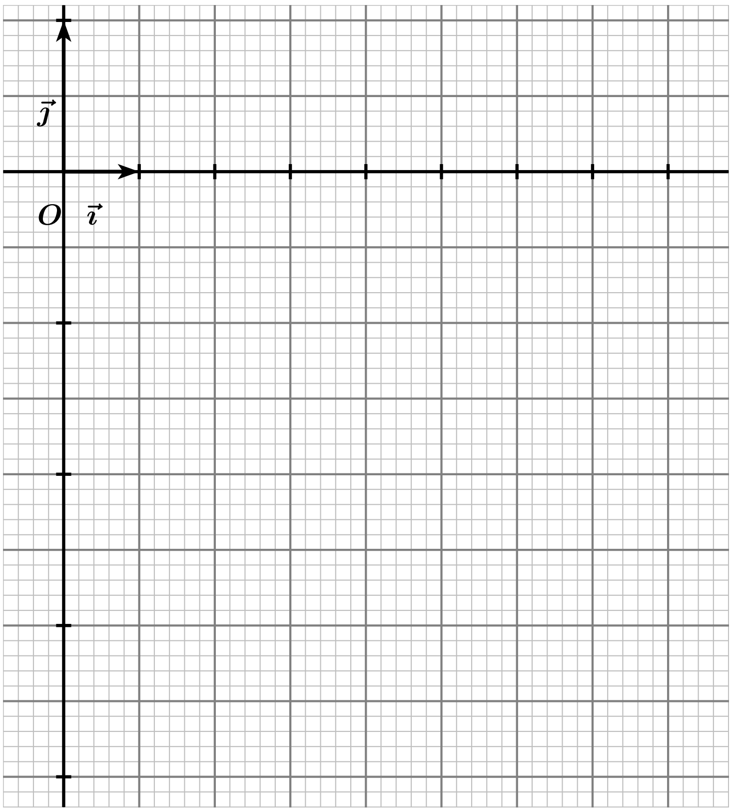
II-5-

$x_B =$

$x_B \approx$

$y_B =$

II-6-



EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

La concentration de $\mathbf{CO_2}$ dans l'atmosphère se mesure en ppm (partie par million).

Une concentration de $\mathbf{1}$ ppm signifie que l'atmosphère contient $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^6}} = \dfrac{\mathbf{0,0001}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0,0001\%}$ de $\mathbf{CO_2}$.

Une concentration de $\mathbf{100}$ ppm signifie donc que l'atmosphère contient $\mathbf{0,01\%}$ de $\mathbf{CO_2}$.

Partie A

Les scientifiques ont étudié l'évolution de la concentration de $\mathbf{CO_2}$ en Europe et ils ont établi que :

- à $\mathbf{10^{-2}}$ près, la concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$ en $\mathbf{2010}$ valait $\;C_0 \approx \mathbf{386,90}$ ppm.

- de $\mathbf{2010}$ à $\mathbf{2012}$, l'augmentation annuelle était de $\mathbf{0,4\%}$ par an.

- à $\mathbf{10^{-2}}$ près, la concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$ en $\mathbf{2013}$ valait $\;C_3 \approx \mathbf{393,51}$ ppm.

C_1 et C_2 désignent respectivement les concentrations annuelles moyennes de $\mathbf{CO_2}$, en ppm, en $\mathbf{2011}$ et en $\mathbf{2012}$.

III-A-1- Déterminer une valeur approchée à $\mathbf{10^{-2}}$ près de C_1. Justifier la réponse.

III-A-2- Justifier que $\quad C_2 \approx \mathbf{390}$ ppm.

III-A-3- p désigne le pourcentage d'augmentation de la concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$ entre $\mathbf{2012}$ et $\mathbf{2013}$.

Déterminer la valeur exacte de p. Justifier la réponse. Que remarquez-vous ?

Partie B

Les experts ont étudié ce qui se passerait si l'augmentation de la concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$ en Europe se poursuivait au même rythme annuel qu'elle le fit entre $\mathbf{2012}$ et $\mathbf{2013}$.

Pour tout entier n, u_n désigne la concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$, en ppm, en Europe à l'année $\mathbf{2012} + n$, calculée avec cette hypothèse-là.

III-B-1- Donner des valeurs approchées à $\mathbf{10^{-2}}$ près de u_0, u_1, u_2.

III-B-2- Justifier que, pour tout entier n, $\quad u_n = \mathbf{390} \times \mathbf{1,009}^n$.

III-B-3- Déterminer une valeur approchée à $\mathbf{10^{-2}}$ près de la concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$, en ppm, prévue en $\mathbf{2050}$. Justifier la réponse.

III-B-4- On sait que la valeur de $\mathbf{1000}$ ppm pour la concentration de $\mathbf{CO_2}$ représente un seuil critique en terme de santé (fréquence accrue d'asthme dans la population par exemple) et les experts estiment que ce seuil pourrait être atteint avant la fin du siècle.

III-B-4-a- Déterminer la plus petite valeur n_0 de l'entier n tel que : $\quad u_n \geq \mathbf{1000}$.

Justifier soigneusement la réponse.

III-B-4-b- En quelle année la concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$ dépasserait-elle $\mathbf{1000}$ ppm ?

III-B-4-c- La prévision des experts sur le fait que le seuil de $\mathbf{1000}$ ppm pourrait être atteint avant la fin du siècle est-elle justifiée ?

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-	$C_1 \approx$, en effet :
III-A-2-	$C_2 \approx \mathbf{390}$ ppm. En effet :
III-A-3-	$p =$ en effet : On remarque que
III-B-1-	$u_0 \approx$ $u_1 \approx$ $u_2 \approx$
III-B-2-	Pour tout entier n, $u_n = 390 \times 1,009^n$, en effet :
III-B-3-	Concentration annuelle moyenne de $\mathbf{CO_2}$ prévue en **2050** : En effet :
III-B-4-a-	$n_0 =$ en effet :
III-B-4-b-	Le seuil de **1000** ppm serait atteint en ....
III-B-4-c-	La prévision des experts...................................justifiée. En effet :

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Une usine fabrique des bonbons de saveurs différentes (fraise, orange, menthe, anis, ...).
Chaque bonbon est emballé dans un papier qui ne mentionne pas le goût du bonbon. Ensuite, les bonbons sont conditionnés dans des sachets.

Partie A

Une étude a montré que la variable aléatoire représentant la masse, exprimée en grammes, d'un sachet de bonbons choisi au hasard dans l'ensemble de la production suit une loi normale d'espérance $\boldsymbol{m = 305}$ et d'écart-type $\boldsymbol{\sigma = 2}$.
Le service qualité effectue un contrôle et choisit au hasard un sachet dans l'ensemble de la production.

IV-A-1- Donner la probabilité P_1 que la masse de ce sachet soit inférieure à **300** g.

IV-A-2- Donner la probabilité P_2 que la masse de ce sachet soit comprise entre **302** g et **308** g.

Partie B

La fraise étant la saveur la plus appréciée des consommateurs, l'usine a décidé que la moitié des bonbons fabriqués auraient un goût de fraise.

Pour remplir un sachet, chaque bonbon est choisi au hasard dans l'ensemble de la production et la production est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer que les choix successifs se font de façon identique et indépendante.

Un client achète un sachet contenant 40 bonbons.

X désigne la variable aléatoire représentant le nombre de bonbons, parmi les 40, au goût de fraise.

IV-B-1- X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

IV-B-2- Donner la probabilité P_3 que la moitié des bonbons du sachet aient un goût de fraise.

IV-B-3- Donner la probabilité P_4 que le sachet contienne au plus **20** bonbons au goût de fraise.

IV-B-4- Donner la probabilité P_5 que le sachet contienne strictement plus de **23** bonbons au goût de fraise.

Partie C

La responsable de production affirme que la proportion p de bonbons au goût de fraise dans l'ensemble de la production est égale à $\boldsymbol{0,5}$. Pour vérifier son propos, elle fait un contrôle.

IV-C-1- L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de **95%** de la fréquence de bonbons au goût de fraise contenus dans un échantillon de n bonbons est :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Donner l'intervalle I pour un échantillon de **40** bonbons.
Les bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.

IV-C-2- La responsable de production prélève au hasard un sachet de **40** bonbons dans la production. Elle remarque que **17** bonbons exactement ont le goût de fraise.
Au vu de l'intervalle I précédent, l'affirmation de la responsable de production est-elle à rejeter ou non ? Expliquer pourquoi.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-A-1-	$P_1 \approx$
IV-A-2-	$P_2 \approx$
IV-B-1-	X suit une loi binomiale de paramètres :
IV-B-2-	$P_3 \approx$
IV-B-3-	$P_4 \approx$
IV-B-4-	$P_5 \approx$
IV-C-1-	$I = [\qquad ; \qquad]$
IV-C-2-	L'affirmation de la responsable .... à rejeter. En effet :

Ne rien inscrire sur cette page

Ne rien inscrire sur cette page