REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques Spécialité

I-1-

x	0	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

I-2- L'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. En effet :

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) < 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique.

I-3-

x	0		α		$+\infty$
Signe de g		-	0	+	

I-4- $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En effet : Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) \times x - \left(x^3 + 1 - \ln(x)\right)}{x^2} = \frac{3x^3 - 1 - x^3 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{2x^3 + \ln(x) - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

I-5- a- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. En effet :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 + 1) = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^3 + 1 - \ln(x)) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

I-5-b- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. En effet :

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

et par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

I-6-

x	0		α		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques Spécialité

II-1- $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,-2\,;\,-2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}(-1\,;\,-2\,;\,1)$

II-2- $AB = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

II-3-a- Les points A, B et C ne sont pas alignés. En effet : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

II-3-b- Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - y - z + 4 = 0$. En effet :

$x_A - y_A - z_A + 4 = 1 - 2 - 3 + 4 = 0$, $x_B - y_B - z_B + 4 = -3 - 1 + 4 = 0$

et $x_C - y_C - z_C + 4 = -4 + 4 = 0$.

Il existe un unique plan passant par les trois points non alignés A, B et C.

II-4-a- $I(-1\,;\,1\,;\,2)$

II-4-b- Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x + y + z - 1 = 0$.

En effet : $\overrightarrow{AB}(-4\,;\,-2\,;\,-2)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $-4x - 2y - 2z + d = 0$. De plus $I \in \mathcal{P}$, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan et on a $-4x_I - 2y_I - 2z_I + d = 0 \Leftrightarrow 4 - 2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$.

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $-4x - 2y - 2z + 2 = 0$ soit $2x + y + z - 1 = 0$.

II-5-a-	Les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$. En effet : **Les vecteurs normaux de $\mathcal{P}$ et (ABC) ne sont pas colinéaires, donc ces deux plans sont sécants selon une droite.**
II-5-b-	Un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.
II-6-a-	Une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ est : $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$.
II-6-b-	Le point C appartient à $\mathcal{S}$. En effet : $IC^2 = (0+1)^2 + (0-1)^2 + (4-2)^2 = 6$ **donc** $IC = \sqrt{6} = \frac{AB}{2}$.
II-6-c-	Le triangle ABC est rectangle en C. En effet : $\overrightarrow{CA}(1\ ;\ 2\ ;-1)$ **et** $\overrightarrow{CB}(-3\ ;0\ ;-3)$. **On a** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -3+0+3 = 0$ **donc les vecteurs** $\overrightarrow{CA}$ **et** $\overrightarrow{CB}$ **sont orthogonaux.**

REPONSES A L'EXERCICE III de Mathématiques Spécialité

III-1-	$P(T) = \frac{1}{4}$ $\quad P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$ $\quad P_T(A_1) = \frac{1}{2}$ $\quad P_{\overline{T}}(A_1) = \frac{1}{6}$.	
III-2-	$P(A_1) = \frac{1}{4}$. En effet : **D'après la formule des probabilités totales,** $P(A_1) = P(T\cap A_1) + P(\overline{T}\cap A_1) = P(T)\times P_T(A_1) + P(\overline{T})\times P_{\overline{T}}(A_1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.	
III-3-	$P_{A_1}(T) = \frac{1}{2}$. En effet : $P_{A_1}(T) = \frac{P(T\cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(T)\times P_T(A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.	
III-4-	$P_T(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad P_{\overline{T}}(A_n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$ $\quad P(A_n) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.	III-5- $a = 3$.
III-6-	$\lim\limits_{n\to+\infty} P_{A_n}(T) = 1$. En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{A_n}(T) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n\left(1+\frac{1}{3^{n-1}}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}} = 1$ **car** $3 > 1$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$.	