

Mathématiques – QCM (40 points)

Pour chaque **Exercice**, plusieurs affirmations sont proposées. Pour chaque affirmation, vous direz si elle est vraie ou fausse en cochant la réponse choisie sur la feuille de réponses.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive sera pénalisée par des points négatifs.

Pour chaque exercice, le total des points obtenu ne peut être strictement négatif.

Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

Les exercices sont tous indépendants.

Première partie – Calculs

Exercice I

I-A- $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$.

Vrai.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

I-B- $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{3} - 2$.

Faux.

Pour tout nombre réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2 - \sqrt{3} \text{ car } \sqrt{3} - 2 < 0.$$

I-C- Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{2 \times 2^n} - \frac{1}{4^n} = 0$.

Faux.

$$\text{Pour } n = 2, \frac{1}{2 \times 2^2} = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8} \text{ et } \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \text{ donc } \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{4^2} \neq 0.$$

I-D- $\frac{2026^2}{2025^2 + 2027^2 - 2} = \frac{1}{2}$.

Vrai.

$$\begin{aligned} \frac{2026^2}{2025^2 + 2027^2 - 2} &= \frac{2026^2}{(2026-1)^2 + (2026+1)^2 - 2} \\ &= \frac{2026^2}{2026^2 - 2 \times 2026 + 1 + 2026^2 + 2 \times 2026 + 1 - 2} = \frac{2026^2}{2 \times 2026^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice II

II-A- Pour tout réel x , $-(6x + 5)(6x - 7) + 36x^2 - 25 = 2(6x + 5)$.

Vrai.

Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} -(6x + 5)(6x - 7) + 36x^2 - 25 &= -36x^2 - 30x + 42x + 35 + 36x^2 - 25 \\ &= 12x + 10 = 2(6x + 5). \end{aligned}$$

II-B- L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2e^{2x+1} \leq -2e^5$ est $]-\infty; 2]$.

Faux.

$$\begin{aligned} -2e^{2x+1} \leq -2e^5 &\Leftrightarrow e^{2x+1} \geq e^5 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 \geq 5 \text{ car la fonction exponentielle est croissante} \\ &\Leftrightarrow x \geq 2. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $[2; +\infty[$.

II-C- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^3 + x^2) = \ln(x^2) \times \ln(x^3)$.

Faux.

Pour $x = 1$, $\ln(x^3 + x^2) = \ln(2)$ et $\ln(x^2) \times \ln(x^3) = \ln(1) \times \ln(1) = 0$. Or $\ln(2) \neq 0$.

II-D- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^3 + x^2) = 2 \ln(x) + \ln(x + 1)$.

Vrai.

Pour tout réel $x > 0$, $x^3 + x^2 > 0$ et $x + 1 > 0$ donc

$$\ln(x^3 + x^2) = \ln(x^2(x + 1)) = \ln(x^2) + \ln(x + 1) = 2 \ln(x) + \ln(x + 1).$$

II-E- Pour tous réels a et b , $\frac{e^a + e^b}{e^{a+b}} = e^{-a} + e^{-b}$.

Vrai.

Pour tous réels a et b ,

$$\frac{e^a + e^b}{e^{a+b}} = \frac{e^a + e^b}{e^a \times e^b} = \frac{1}{e^b} + \frac{1}{e^a} = e^{-a} + e^{-b}.$$

Exercice III

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $(E) : x^2 = a^2$, d'inconnue réelle x .

III-A- Si le nombre réel a est strictement négatif, alors l'équation (E) n'a pas de solution.

Faux.

Si le nombre réel a est strictement négatif, alors $a^2 > 0$ et l'équation (E) admet les deux solutions a et $-a$.

III-B- Pour tout nombre réel a , l'équation (E) admet a comme unique solution.

Faux.

Pour tout nombre réel a non nul, alors l'équation (E) admet les deux solutions distinctes a et $-a$.

Si $a = 1$, l'équation devient $x^2 = 1$ et admet les deux solutions -1 et 1 .

III-C- Il existe une unique valeur de a pour laquelle l'équation (E) admet une unique solution.

Vrai.

L'équation (E) admet une unique solution si, et seulement si $a = 0$.

Deuxième partie – Fonctions à valeurs réelles

Exercice IV

Soient f une fonction continue sur \mathbb{R} et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

IV-A- Si C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$, alors l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution.

Faux.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2+1}$.

f est une fonction continue sur \mathbb{R} et sa courbe représentative dans un repère orthonormé admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Toutefois, $f(-1) = -1$.

IV-B- Si C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Vrai.

Par définition d'une asymptote horizontale.

IV-C- Si C_f admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$, alors $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Faux.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2+1}$.

f est une fonction dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -1$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Toutefois, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$.

Exercice V

Soient f la fonction définie pour tout réel x différent de 1 par $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

V-A- C_f admet une asymptote d'équation $x = 0$.

Faux.

f est définie et continue en 0 donc C_f n'admet pas une asymptote d'équation $x = 0$.

V-B- f est croissante sur $]1; +\infty[$.

Faux.

$f(2) = 1$ et $f(3) = \frac{1}{4}$ donc $2 < 3$ mais $f(2) > f(3)$.

V-C- La fonction F définie par $F(x) = \frac{-1}{1-x}$ est une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

Faux.

Pour $x > 1$, $F(x) = \frac{1}{x-1}$ et $F'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(1-x)^2} = -f(x)$.

Troisième partie – Suites numériques

Exercice VI

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.

VI-A- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Vrai.

Pour tout entier naturel n , $u_n = (-1)^n$ appartient à l'intervalle $[-1; 1]$, ce qui signifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par -1 et 1.

VI-B- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Faux.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dont les termes de rangs pairs valent 1 et les termes de rangs impairs valent -1 . Elle ne peut donc pas converger.

VI-C- $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Faux.

$$\frac{u_1}{1} = -1 \text{ et } \frac{u_2}{2} = \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{u_1}{1} < \frac{u_2}{2}.$$

VI-D- $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Vrai.

Pour tout entier naturel n , $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = -1$. Donc $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à -1 .

Quatrième partie – Probabilités

Exercice VII

VII-A- On effectue quatre lancers d'une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir une seule fois face est égale à $\frac{3}{4}$.

Faux.

On répète quatre fois de manière indépendante une expérience aléatoire dont l'issue « succès » a pour probabilité $\frac{1}{2}$. La variable aléatoire X correspondant au nombre de fois où on obtient face suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{2}$.

$$P(X = 1) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Exercice VIII

VIII-A- On tire au hasard successivement et sans remise deux cartes dans un jeu de 32 cartes comportant 16 cartes rouges et 16 cartes noires. Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de cartes noires parmi les deux tirées, alors X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Faux.

Le tirage est effectué sans remise donc les expériences ne sont pas identiques.

Cinquième partie – Géométrie dans le plan

Exercice IX

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A , B et C de coordonnées respectives : $A(1; -1)$, $B(-2; 5)$ et $C(3; 5)$.

IX-A- Une équation de la droite (AB) est $2x + y - 1 = 0$.

Vrai.

$$2x_A + y_A - 1 = 2 \times 1 - 1 - 1 = 0 \text{ et } 2x_B + y_B - 1 = 2 \times (-2) + 5 - 1 = 0.$$

L'équation est vérifiée par deux points distincts de la droite (AB) .

Donc l'équation $2x + y - 1 = 0$ est bien une équation de la droite (AB) .

IX-B- Une équation de la droite \mathcal{D} perpendiculaire à (AB) passant par C est $x - 2y + 7 = 0$.

Vrai.

La droite \mathcal{D} a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et passe par le point $C(3; 5)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CM} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 6y - 21 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0.$$

VII-C- Le point d'intersection I de la droite (AB) avec la droite \mathcal{D} a pour coordonnées $I(-1; 3)$.

Vrai.

$2x_I + y_I - 1 = 2 \times (-1) + 3 - 1 = 0$ donc le point de coordonnées $(-1; 3)$ appartient à la droite (AB) .

$x_I - 2y_I + 7 = -1 - 2 \times 3 + 7 = 0$ donc le point de coordonnées $(-1; 3)$ appartient à la droite \mathcal{D} .

Les deux droites sont perpendiculaires donc sécantes en un seul point. Donc le point d'intersection I de la droite (AB) avec la droite \mathcal{D} a pour coordonnées $I(-1; 3)$.