REPONSES A L'EXERCICE I de Mathématiques Spécialité

**I-1-** Le point $A$ n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$. En effet : **Le système $\begin{cases} 1+t=2 \\ 2t=-1 \\ -1+t=-1 \end{cases}$ n'admet pas de solution.**

**La première équation implique que $t = 1$ et la dernière implique que $t = 0$.**

**I-2-** $\vec{u}(\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{2}\ ;\ \mathbf{1})$

**I-3-** Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $\boldsymbol{x+2y+z+1=0}$. En effet : **$\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $x+2y+z+d=0$.**

**De plus $A \in \mathcal{P}$, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan**

**et on a $x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow 2-2-1+d=0 \Leftrightarrow d=1$.**

**Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $x+2y+z+1=0$.**

**I-4-** Les coordonnées de $B$ sont $B(\frac{5}{6}\ ;-\frac{1}{3}\ ;-\frac{7}{6})$. En effet : **Les coordonnées de $B$ sont solutions du système**

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \\ x+2y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \\ 1+t+4t-1+t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{6} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=-\frac{7}{6} \\ t=-\frac{1}{6} \end{cases}.$$

**I-5-** $AB^2 = \boldsymbol{\frac{11}{6}}$ . En effet : $\overrightarrow{AB}\left(\frac{5}{6}-2\ ;\ -\frac{1}{3}+1\ ;\ -\frac{7}{6}+1\right)$ **soit** $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{7}{6}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ -\frac{1}{6}\right)$

**donc** $AB^2 = \left(\frac{-7}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}+\frac{16}{36}+\frac{1}{36} = \frac{66}{36} = \frac{11}{6}$.

**I-6-** $a=\mathbf{6}$ $\quad b=\mathbf{2}$ $\quad c=\mathbf{2}$

**I-7-a-**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{11}{6}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**I-7-b-** La fonction $f$ admet un **minimum** en $-\frac{1}{6}$ qui vaut $\frac{11}{6}$.

**I-8-a-** $\overrightarrow{AM_0}\,(\mathbf{-1}\ ;\ \mathbf{1}\ ;\ \mathbf{0}\ )$

**I-8-b-** $AM_0 = \sqrt{\mathbf{2}}$

**I-9-** Il existe un nombre réel $k$ tel que $\overrightarrow{HM_0} = k\vec{u}$. En effet : **Les points $H$ et $M_0$ sont deux points de la droite $\mathcal{D}$ donc le vecteur $\overrightarrow{HM_0}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$, vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.**

**I-10-a-** $k = \frac{\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$. En effet : **Comme $H$ est le projeté orthogonal du point $A$ sur la droite $\mathcal{D}$, on a**

$$\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{u} = k\vec{u}\cdot\vec{u} = k\|\vec{u}\|^2 \text{ donc } k = \frac{\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

**I-10-b-** $k = \frac{1}{6}$. En effet : $\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1$ **et** $\|\vec{u}\|^2 = 1^2+2^2+1^2 = 6$.

**I-10-c-** $HM_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

| | |
|---|---|
| I-11- $AH^2 = \frac{11}{6}$. En effet : Le triangle $AHM_0$ est rectangle en $H$ donc d'après le théorème de Pythagore, $AH^2 = AM_0{}^2 - HM_0{}^2 = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$. | I-12- $\ell = \sqrt{\frac{11}{6}}$. |

REPONSES A L'EXERCICE II de Mathématiques Spécialité

| |
|---|
| II-1- $P_M(T) = \frac{9}{10}$ $P_M(\bar{T}) = \frac{1}{10}$ $P_{\bar{M}}(T) = \frac{1}{5}$ $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = \frac{4}{5}$ |
| II-2- $P(T) = \frac{3}{8}$. En effet : D'après la formule des probabilités totales, $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{10} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$. |
| II-3- $P_T(M) = \frac{3}{5}$. En effet : $P_T(M) = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)} = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{15}{40}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. |

REPONSES A L'EXERCICE III de Mathématiques Spécialité

| |
|---|
| III-1-a- $h(0) = \left(\frac{1}{f(0)} - 1\right) e^0 = 1$. |
| III-1-b- Pour tout nombre réel $x$, $h'(x) = 0$. En effet : Pour tout nombre réel $x$, $h'(x) = \left(-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\right) \times e^{-x} + \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) \times (-e^{-x}) = \left(\frac{-f'(x) - f(x) + (f(x))^2}{(f(x))^2}\right) e^{-x}$. Or, $f'(x) = (f(x))^2 - f(x)$, donc $-f'(x) - f(x) + \left(f(x)\right)^2 = 0$ ce qui implique $h'(x) = 0$. |
| III-1-c- On peut en déduire que la fonction $h$ est constante et égale à 1. |
| III-1-d- Pour tout nombre réel $x$, $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. En effet : Pour tout nombre réel $x$, $h(x) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) e^{-x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} - 1 = e^x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ . |
| III-2- La fonction $f$ est solution du problème $\mathcal{P}$. En effet : La fonction $f$ est définie, dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ; on a $f(0) = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$ et pour tout réel $x$, $f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1 - 1 - e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{(e^x+1)^2} - \frac{1 + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{(e^x+1)^2} - \frac{1}{e^x+1} = \left(f(x)\right)^2 - f(x)$. |